

GEOMETRIE DER SPHÄRE IN PROGRAMMEN 1)

S.K. Grosser, Wien

Als Unterrichtsstoff ist die sphärische Trigonometrie - und nicht nur in Österreich - fast vollständig der Vergessenheit anheimgefallen; sie spielt heutzutage wohl lediglich als universitärer Lehrstoff im Rahmen der Ausbildung zum Astronomen oder Geodäten oder für verwandte Disziplinen eine gewisse Rolle. Dazu tritt der durch das Vordringen der Computer-mathematik bedingte Verfall der zunftgemäßen Rechenkünste.

Da sich aber weder an der (nahezu) sphärischen Form der Erdoberfläche noch an den einschlägigen Grundprinzipien der Nautik, der Geographie oder der Astronomie Entscheidendes verändert hat, wird der Bildungswillige, der nicht nur Spezialist sein will, weiterhin an der Notwendigkeit des Erwerbs von Grundkenntnissen auf diesem Gebiet interessiert sein.

Ferner werden sich Curriculums-Experten der Behauptung verschließen können, daß es sich bei der sphärischen Trigonometrie um einen im besten Sinne fach-übergreifenden Lehrstoff handelt, der zumindest die Fächer Mathematik, Physik und Geographie betrifft.

In diesem Vortrag soll nun die These begründet werden, daß einer Wiederbelebungs dieses Unterrichtsstoffes im Rahmen des  $[0,1]$ -Darstellungsraumes des Computers nichts entgegensteht, und es sollen jene Techniken der linearen Algebra, die schon immer ihre Einsetzbarkeit für die Belange der Elementargeometrie charakterisierten, Techniken also, die auf der Verwendung des inneren und des Vektorprodukts basieren, für diesen Versuch der Wiederbelebungs nutzbar gemacht werden. Zugleich dienen diese und verwandte Techniken der Bewältigung der auftretenden Abbildungs- und Projektionsprobleme, die von darstellenden Geometern traditionellerweise mit einem etwas anders gearteten Formelinstrumentarium (siehe z.B. [G] und [E]) bewältigt werden. Selbstverständlich sind es, im Grunde genommen, die gleichen Formeln; aber für den an mathematische Schreib- und Denkweise Gewöhnten sieht alles eben etwas "anders" aus.

---

1) Stark veränderte Fassung eines Vortrages, gehalten im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, BR Deutschland, am 28.11.1988 im Rahmen der Tagung "Geometrie im Schulunterricht".

Es soll also in diesem Vortrag skizziert werden, wie man, von der linearen Algebra in einer wohl weitverbreiteten Sicht- und Denkweise ausgehend, einen einheitlichen Zugang einerseits zu den mathematischen Problemen der traditionellen sphärischen Trigonometrie und andererseits zu den Darstellungsproblemen (Perspektive, Parallelprojektion, Orthogonalprojektion) im Zusammenhang mit 2-dimensionalen Darstellungen durch ein leistungsfähiges interaktives Computerprogramm geben kann. Daß die Kugeloberfläche auch als interessanter und elementar zu erfassender Maßraum wiederentdeckt wird [H], darf als weiteres Indiz gewertet werden, daß die erneute Beschäftigung mit der  $S_2$  auch Mathematikern durchaus lohnend erscheint.

Ferner sei der Leser insbesondere auf § 4 hingewiesen, wo eine elementare Geometrie der sphärischen Dreiecke entwickelt wird. Wenn das vor kurzem erschienene reichhaltige Buch über "Kugelgeometrie" von H.G. Bigalke [B] einen, was anzunehmen ist, ziemlich vollständigen Überblick über das bisher Bekannte gibt (siehe insbesondere Aufgabe 2.4.8 auf Seite 62 sowie die in 2. erläuterte Methode der "kleinen" sphärischen Dreiecke), so liegt die Vermutung nahe, daß dieses Thema keineswegs ausdiskutiert ist und daß frühere diesbezügliche Ansätze sehr unter den Widrigkeiten der zeichnerischen Darstellung litten oder daran scheiterten. Das in § 5 vorgestellte, stark interaktive PASCAL-Programm gestattet nun in müheloser Weise das Zeichnen von sphärischen Dreiecken samt ihren merkwürdigen Punkten (soweit vorhanden), die Berechnung aller zugehörigen metrischen Größen (Koordinaten, Längen, Winkel etc.) und sogar das Austesten von Vermutungen. Die Hervorhebung von Konstruktionsmerkmalen bzw. die Unterscheidung wesentlicher Konstruktions-schritte gelingt angesichts der Beschränktheit des PC-Bildschirmes am besten mit Hilfe einer guten Farbbildgraphik (EGA).

Um den vorgesehenen Darstellungsrahmen nicht gänzlich zu sprengen, werde ich mich im Folgenden auf die überblicksmäßige Beschreibung der beiden folgenden Problembereiche beschränken. 2)

(A) Entwicklung des hier benötigten Instrumentariums an Formeln und Sätzen aus der linearen Algebra.

(B) Grobe Beschreibung des Aufbaus und der Merkmale des aus drei Teilen bestehenden PASCAL-Programmes zur sphärischen Geometrie, auf das hier bezug genommen wird.

---

2) Die detaillierten Formeln und Beweise werden an anderer Stelle dargestellt werden.

### § 1. Formeln aus der Vektorrechnung

Wir bezeichnen Punkte des  $\mathbb{R}^3$ , wie üblich, mit großen lateinischen Buchstaben und identifizieren sie mit den zugehörigen Ortsvektoren:

$$A := (a_1, a_2, a_3)$$

bezeichnet also sowohl den Punkt A als auch den Vektor mit Anfangspunkt  $O=(0, 0, 0)$  und Endpunkt A; seine Länge (Norm) werde mit  $\|A\|$  bezeichnet. Für den Winkel  $\gamma := \sphericalangle(A, B)$  zwischen A und B gilt

$$(1) \quad \cos \gamma = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|},$$

wo  $A \cdot B := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = B \cdot A$  das innere Produkt bezeichnet. Da die Cosinus-Funktion auf  $[0, \pi]$  injektiv ist, ist  $\gamma$  durch (1) in diesem Intervall eindeutig bestimmt. Das Vektorprodukt der Vektoren A und B ist durch  $A \times B := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$  definiert und genügt den Identitäten

$$(2) \quad A \times A = 0; \quad B \times A = -A \times B;$$

$$(3) \quad \|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin \sphericalangle(A, B);$$

dabei stellt die rechte Seite der Identität (3) den Flächeninhalt des von A und B aufgespannten Parallelogramms dar.

Je drei Vektoren A, B, C bilden eine  $3 \times 3$  Matrix  $[A, B, C]$  mit der Determinante

$$\Delta [A, B, C] := a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - b_3 a_2 c_1 - b_3 c_2 a_1$$

(Nur aus mnemotechnischen Gründen wird diese Formel in der obigen Form - "Regel von Sarrus" - angeführt, in der die algebraische Symmetrie der Determinantenformel ignoriert wird). Für die bisher definierten Operationen gelten die folgenden wohlbekannteren Formeln:

$$(4) \quad (A \times B) \cdot (C \times D) = \Delta \begin{bmatrix} A \cdot C & B \cdot C \\ A \cdot D & B \cdot D \end{bmatrix} = (A \cdot C)(B \cdot D) - (B \cdot C)(A \cdot D)$$

$$(5) \quad A \times [B \times C] = -(A \cdot B)C + (A \cdot C)B;$$

$$(6) \quad A \cdot (B \times C) = \Delta [A, B, C] = \Delta [C, A, B] = C \cdot (A \times B)$$

Jeder der Operationen  $A \cdot B$ ,  $A \times B$  und  $\Delta [A, B, C]$  ist in jeder der auftretenden Variablen  $\mathbb{R}$ -linear, sodaß dieselbe Aussage für die Terme gilt, die in (2), (4), (5), (6) auftreten: ersetzt man eine der Variablen durch das r-Fache, wo  $r \in \mathbb{R}$ , dann wird der Term mit r multipliziert.

## § 2. Klassische Formeln der Trigonometrie auf $S_2$ .

Je zwei verschiedene Punkte  $A, B$  auf  $S_2$  d.h.  $\|A\| = \|B\| = 1$ ) bestimmen einen Großkreis mit Mittelpunkt  $O$  und je drei verschiedene Punkte  $A, B, C$  bestimmen einen Kleinkreis  $K$ . Falls  $K$  nicht ein Großkreis ist, bestimmt es in eindeutiger Weise drei Großkreisbögen  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ , die ein sphärisches Dreieck  $ABC$  bilden. Seine Seiten  $a, b, c$  und seine Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  sind durch die folgenden leicht verifizierbaren Formeln gegeben:

$$(7) \cos a = B \cdot C, \cos b = C \cdot A, \cos c = A \cdot B$$

$$(8) \cos \alpha = \frac{(C \times A) \cdot (B \times A)}{\sin b \sin c}, \cos \beta = \frac{(A \times B) \cdot (C \times B)}{\sin c \sin a}, \cos \gamma = \frac{(B \times C) \cdot (A \times C)}{\sin a \sin b}$$

Aus diesen (rein algebraischen) Definitionen ergeben sich die folgenden wichtigen Sätze (siehe [B])

### Seitencosinussatz

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned}$$

### Sinussatz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

### Winkelcosinussatz

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned}$$

Da sich gemäß [S] aus dem ersten Satz alle Sätze über die Trigonometrie sphärischer Dreiecke herleiten lassen, ist der ursprünglichen Intention damit genügegetan. Es ist jedoch an diesem Punkt leicht, auch eine weitere klassische Konstruktion in die Herleitung aus der linearen Algebra mit einzubeziehen.

Zu dem sphärischen Dreieck  $\{A, B, C\}$  definieren wir das polare Dreieck  $\{A', B', C'\}$  durch

$$A' := \frac{B \times C}{\|B \times C\|}, B' := \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, C' := \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$$

Seine Seiten seien  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , die Winkel  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ .

### Polaritätssatz

$$(a) \ a' = \pi - \alpha, \ b' = \pi - \beta, \ c' = \pi - \gamma;$$

$$(b) \ \alpha' = \pi - a, \ \beta' = \pi - b, \ \gamma' = \pi - c;$$

$$(c) \ A'' = A, \ B'' = B, \ C'' = C.$$

Aus diesen algebraischen Deduktionen und Formeln ergeben sich auch zwanglos die folgenden Ungleichungen für die metrischen Bestimmungsstücke -  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $a + b + c$ ,  $\alpha + \beta + \gamma$ ,  $f1$  (Fläche):

$$\begin{aligned} 0 \leq a, b, c \leq \pi r & & 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi \\ 0 \leq a + b + c \leq 2\pi r & & \pi \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 3\pi \\ & & 0 \leq f1 \leq 2\pi r^2 \end{aligned}$$

(Wird der Kugelradius 1 durch  $r$  ersetzt, tritt eine entsprechende Potenz von  $r$  in diesen Formeln auf). Wegen seiner - im Vergleich zu traditionellen Methoden unvergleichlich höheren Rechenleistung und Genauigkeit kann ein Computerprogramm, mit einigen wenigen dieser Formeln ausgestattet, (fast) alle traditionellen Aufgaben der Dreiecksberechnung lösen, sodaß sich der riesige Formelapparat der traditionellen sphärischen Geometrie (Gauß, Napier, l' Huilier u.a. insgesamt zwischen 50 und 100 Formeln!) auf einen Bruchteil reduzieren läßt. (siehe [B-S]).

Zur Herleitung der in § 2 angeführten Sätze genügen die Formeln von § 1; zusätzlich werden auf diese Art Formeln für die Koordinaten der jeweils betrachteten Punkte gewonnen, eine Grundvoraussetzung für eine erfolgreiche Algorithmisierung. Zugleich ergibt sich aus der Vektordarstellung die Möglichkeit, mit Hilfe eines geeigneten Projektionsverfahrens (zentrale Perspektive bzw. Parallelprojektion bzw. Orthonormalprojektion) eine geeignete Graphik zu erstellen. Sie wird in § 5 skizziert.

### § 3. Kongruenz von sphärischen Dreiecken

Mit der traditionellen Definition der Kongruenz (von Dreiecken) in der Ebene ist der Leser vertraut, die entsprechende Definition für sphärische Dreiecke findet sich z.B. in [B, p. 38]. Da in der hier vorgelegten Darstellung ein rein algebraischer Standpunkt bezogen wird, sollte Kongruenz selbstverständlich im Sinne der Klein'schen Idee der Wechselwirkung zwischen Gruppentheorie und Geometrie allein aus der Gruppentheorie gewonnen werden.

Jene lineare Transformationsgruppe des  $\mathbb{R}^3$ , welche die  $\mathbb{S}_2$  (und damit die Oberfläche jener Kugel um 0) umkehrbar in sich abbildet, ist aber genau die orthogonale Gruppe  $O(3)$ . Sie besteht bekanntlich aus jenen reellen  $3 \times 3$ -Matrizen  $\alpha$ , für die  $\alpha^t = \alpha^{-1}$ , wo  $\alpha^t$  die transponierte Matrix bedeutet. Verstehen wir unter einem Dreieck auf  $\mathbb{S}_2$  einfach die Punktmenge  $\{A, B, C\}$ , so erfüllt die folgende Definition die oben erwähnte Anforderung.

**Definition:** Zwei sphärische Dreiecke  $\{A, B, C\}$  und  $\{A', B', C'\}$  heißen kongruent, falls eine orthogonale Transformation  $\alpha \in O(3)$  existiert, sodaß  $\alpha(A)=A'$ ,  $\alpha(B)=B'$ ,  $\alpha(C)=C'$ .

Für jedes  $\alpha \in O(3)$  gilt aber  $\Delta(\alpha) = \pm 1$  und für jede eigentlich orthogonale lineare Transformation  $\alpha$  (d.h.  $\Delta(\alpha) = 1$ ), ist  $+1$  ein Eigenwert. Aus diesen Fakten folgt, daß jedes  $\alpha$  als Produkt einer Drehung um eine geeignete Achse durch 0 und einer Spiegelung an einer dazu senkrechten Ebene schreiben läßt. Solche Drehungen und Spiegelungen sind aber genau jene Operationen, mit deren Hilfe die übliche Kongruenzdefinition im gegebenen Fall realisiert wird. (Die Spiegelung an 0 läßt sich ebenfalls auf diese Weise ausdrücken). Daraus folgt die Gleichwertigkeit der oben gegebenen Definition mit der üblichen.

Damit werden aber die Kongruenzsätze für sphärische Dreiecke zu Sätzen über die Existenz gewisser orthogonaler Transformationen. Eine vollständige Auflistung dieser Fälle findet der Leser in [B]. Angesichts der Tatsache, daß orthogonale Transformationen Längen von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren bewahren, ergibt sich auch im Wege einer mathematischen Umwegrentabilität die Möglichkeit, gewisse traditionelle Sätze der sphärischen Trigonometrie (wie z.B. [B, p. 47, Satz 2.7 c]) als selbstverständliche Folgerung anzusehen.

#### § 4. Dreiecksgeometrie auf $\mathbb{S}_2$

Während die sphärische Trigonometrie wie schon erwähnt, durch einen Reichtum an Formeln und Problemstellungen gekennzeichnet ist, gilt das nur in beschränktem Maße für die Geometrie der sphärischen Dreiecke (oder anderer Figuren auf der  $\mathbb{S}_2$ ); der Grund dafür dürfte eben vorallem darin liegen, daß die Konstruierbarkeit bisher nur durch den Einsatz fortgeschrittener Techniken der darstellenden Geometrie gesichert werden konnte, eine Situation, die sich mit der Möglichkeit des Einsatzes von Computer-Graphik schlagartig gebessert hat.

Zunächst stellt sich natürlich die Frage, ob die Grundbegriffe und Grundtatsachen der Geometrie der Dreiecke - insbesondere z.B. die Lehre von den merkwürdigen Punkten - überhaupt in sinnvoller Weise übertragbar bzw. gültig sind. Diesbezügliche Resultate werden (z.T. in Form von Aufgaben) in [B, p. 62] dargestellt.

Die Definition der Begriffe "Schwerlinie", "Winkelsymmetrale" und "Seitensymmetrale" durch Übertragung der entsprechenden Begriffe für ebene Dreiecke bereitet keine Schwierigkeiten. Ersetzt man in den entsprechenden metrischen Überlegungen für ebene Dreiecke den Begriff "Distanz zwischen A und B" durch "Distanz zwischen A und B entlang eines Großkreises", so sieht man sofort ein, daß jedes sphärische Dreieck  $\{A, B, C\}$  die folgenden Punkte besitzt:

Schwerpunkt S, Umkreismittelpunkt U, Inkreismittelpunkt I  
(und Ankreismittelpunkt  $I_A, I_B, I_C$ ).

Für die Beweise dieser Behauptungen ist es hilfreich, das sphärische Dreieck  $\widehat{ABC}$  mit dem zugehörigen ebenen Dreieck  $\overline{ABC}$  zu vergleichen; die entsprechenden merkwürdigen Punkte werden aus denen des ebenen Dreiecks durch Projektion aus O erhalten. Durch analoge Überlegungen erhält man Vektorformeln für diese Punkte sowie für die Fußpunkte der entsprechenden Konstruktionslinien: Schwerlinien, Seitensymmetralen, Winkelsymmetralen (innen und außen).

Schwieriger ist die Sachlage beim Höhenschnittpunkt. Ist z.B. der Punkt C ein Pol der durch A und B bestimmten Großkreisebene, so existiert keine eindeutig bestimmte "Höhe" von C auf  $\widehat{AB}$ ; aber die Höhen von A auf  $\widehat{BC}$  und von B auf  $\widehat{CA}$  können existieren und schneiden einander dann auf jeden Fall in einem Punkt H. Für ein gleichseitiges Dreieck ( $AB = BC = CA = \frac{\pi}{2}$ ) existiert kein Höhenschnittpunkt.<sup>4)</sup>

Auch im allgemeinen Fall existiert immer ein Höhenschnittpunkt H. Wir fassen die bisher angedeuteten Resultate nun zusammen.

Satz (von den merkwürdigen Punkten)

In jedem sphärischen Dreieck  $\{A, B, C\}$  existieren die Punkte S, U, I (sowie  $I_A, I_B, I_C$ ). Es gelten die folgenden Vektorformeln:

$$S = \|\|A+B+C\|\|^{-1} (A+B+C)$$

---

4) Zieht man als artfremde Argumentationshilfe den analytischen Begriff der Stetigkeit heran, so kann man auch für die genannten Grenzfälle mühelos einen Höhenschnittpunkt definieren.

2) Definiere  $U_A := \|B+C\|^{-1}(B+C)$  und analog  $U_B$  und  $U_C$ .

Es ist

$$U = \| (U_B \times (C \times A)) \times (U_C \times (A \times B)) \|^{-1} [ (U_B \times (C \times A)) \times (A \times B) ].$$

3) Definiere  $A^* := \|C \times A\|^{-1} C \times A + \|A \times B\|^{-1} A \times B$  und analog  $B^*$  und  $C^*$ .

Ferner  $A^{**} := \|A + A^*\|^{-1} (A + A^*)$  und analog  $B^{**}$  und  $C^{**}$ .

Definiere  $I_A := \| (A \times A^{**}) \times (B \times C) \|^{-1} [ (A \times A^{**}) \times (B \times C) ]$  und analog  $I_B$  und  $I_C$ .

Es ist

$$I = \| (A \times I_A) \times (B \times I_B) \|^{-1} [ (A \times I_A) \times (B \times I_B) ]$$

(und zwei analoge Formeln)

Satz (vom Höhenschnittpunkt)

Definiere  $A' := A \cdot \|B \times C\|^{-2} [A \times (B \times C)] \quad B \times C$  und analog  $B'$  und  $C'$ .

Ferner  $H_A := \|A'\|^{-1} A'$  (falls  $A' \neq 0$ ) und analog  $H_B$  und  $H_C$ .

Dann existiert  $H := \widehat{AH}_A \widehat{\cap} \widehat{BH}_B \widehat{\cap} \widehat{CH}_C$ , falls  $A' \neq 0$ ,  $B' \neq 0$ ,  $C' \neq 0$ .

Es ist

$$H = \| [ (A \times B) \times C ] \times [ (B \times C) \times A ] \|^{-1} [ (A \times B) \times C ] \times [ (B \times C) \times A ]$$

(und zwei analoge Formeln)

Hier erhebt sich die Frage, ob etwa ein Analogon zur Euler'schen Geraden oder zum Feuerbachschen Kreis existiert. Es sei hier erwähnt, daß gewisse Analoga der Sätze von Ceva bzw. Menelaos tatsächlich gelten. Was die Gültigkeit oder Nichtgültigkeit der beiden erstgenannten Sätze anbelangt, so möge sich der Leser die Widersprüche einer "Widerlegung durch Zeichnung" bzw. "Widerlegung durch Gegenbeispiel" vor Augen führen. Auch hier zeigt sich die Nützlichkeit eines interaktiven Computerprogramms.

### § 5. Allgemeine Programmcharakteristiken

Jedes der Programme kann grundsätzlich in drei verschiedenen Darstellungsmodi realisiert werden:

Perspektive aus einem Zentrum ( $\mathcal{S}_2$  als Ellipse)

Parallelprojektion ( $\mathcal{S}_2$  als Ellipse)

Orthonormalprojektion ( $\mathcal{S}_2$  als Kreis)



Die Darstellung erfaßt und verarbeitet die folgenden Bildelemente:

Koordinatensystem	Meridiane
Mittelpunkt	Breitenkreise
Äquator	Kontur
Großkreis (3 Punkte)	Kleinkreis (3 Punkte)
Großkreissegment	Tangentialvektor

Um metrisch gegebene sphärische Dreiecke auf der  $S_2$  darstellen zu können, benötigt man die Lösung der folgenden Konstruktionsaufgaben:

Bestimme den Schnitt zweier Großkreise (2 Lösungen)

Bestimme C aus A, B, a und b (2 Lösungen)

Aufgrund der Möglichkeit, das ganze Bild um die z-Achse zu drehen und um die x-Achse zu kippen, ergibt sich für fast jede darzustellende Situation eine geeignete Perspektive.

Das schwierigste Darstellungsproblem betrifft die geeignete Parametrisierung von Kreisen (Großkreisen, Kleinkreisen und Konturkreis). Es sei nur erwähnt, daß die Darstellung des Konturkreises nicht mit der Abtast-Methode der Darstellenden Geometrie erfolgt- ein Punkt gehört genau dann zur Kontur, wenn sein Ortsvektor auf dem Sehstrahl senkrecht steht. [G] bzw. [E]-sondern in mathematisch exakter Weise aufgrund von Kongruenzoperationen.

### § 6. Die Programme

Das ergibt auf einheitlicher Grundlage die drei folgenden Programme:

- P1 Polygonzüge auf der  $S_2$  (bzw. der Erdoberfläche) und ihre Berechnung
- P2 (Klassische) sphärische Trigonometrie
- P3 Dreiecksgeometrie auf  $S_2$ .

Zur Illustration des Aufbaus sind Beispiele zu P1 und P3 beigelegt, an denen sich der Leser leicht selbst orientieren kann.

Blatt 5 und 6 sind im Original vielfärbig. Blatt 5 stellt einen Polygonzug auf der  $S_2$  mit eingezeichneten (vergrößerten) Einheits-tangentialvektoren dar. Der zugehörige Datenscreen wäre mit Blatt 2 analog.

Blatt 6 stellt ein Dreieck mit seinen merkwürdigen Punkten samt Konstruktionslinien dar. Sein Datenschirm wäre mit Blatt 3 analog

Ich möchte an dieser Stelle den Studierenden J. Graßberger und R. Rößler für die Mitarbeit bei der Realisierung der Programme danken.

## Blatt 1

Hauptmenü

RR 15/05/89

<u>Zeichnen</u>	<u>Verändern</u>	<u>Wechsle Bildschirm</u>
Punkt	Drehen und Kippen	Graphik
Meridian	Löschen	Daten
Breitenkreis	Farbpalette ändern	Plotten
Großkreis	Radius ändern	Ende
Kleinkreis		
Polygonzug		
Tangentialvektoren		

## Blatt 2

Daten-Schirm

Kugelradius = 6370.00

Drehwinkel = 0.00°

Kippwinkel = 0.00°

Meridian: -50.00°

Breitenkreis: 80.00°

Polygonzug: (-30.00 | 0.00) (60.00 | 60.00) (50.00 | -40.00) (-30.00 | -20.00)  
 (-30.00 | 0.00)

Tangentialeinheitsvektoren: ( 0.25 | 0.43 | 0.87) ( 0.87 | -0.50 | -0.00)

( 0.55 | 0.68 | -0.50) ( 0.34 | 0.55 | 0.76) ( 0.69 | -0.72 | -0.13)

( 0.23 | 0.80 | -0.56) ( 0.30 | -0.17 | 0.94) ( 0.00 | 0.00 | -1.00)

Gesamtlänge = 10005.97 + 11155.41 + 7763.25 + 2223.55 = 31148.18

Blatt 3  
Hauptmenü

RR 15/05/89

<u>Zeichnen</u>	<u>Verändern</u>	<u>Wechsle Bildschirm</u>
Dreieck	Drehen und Kippen	Graphik
Umkreis	Löschen	Daten
Inkreis	Farbpalette ändern	Plotten
Höhenschnittpunkt	Radius ändern	Ende
Schwerpunkt		
Ankreise		
Lagebeziehungen		

Daten-Schirm

Blatt 4

Kugelradius = 1.00

Drehwinkel = 0.00°

Kippwinkel = 0.00°

Dreieck: (-40.00|-30.00), (70.00|-10.00), (10.00|80.00) =  
( 0.66|-0.56|-0.50), ( 0.34| 0.93|-0.17), ( 0.17| 0.03| 0.98)

Umkreis: Mittelpunkt : ( 0.95| 0.15| 0.26) Sphärischer Radius = 1.14

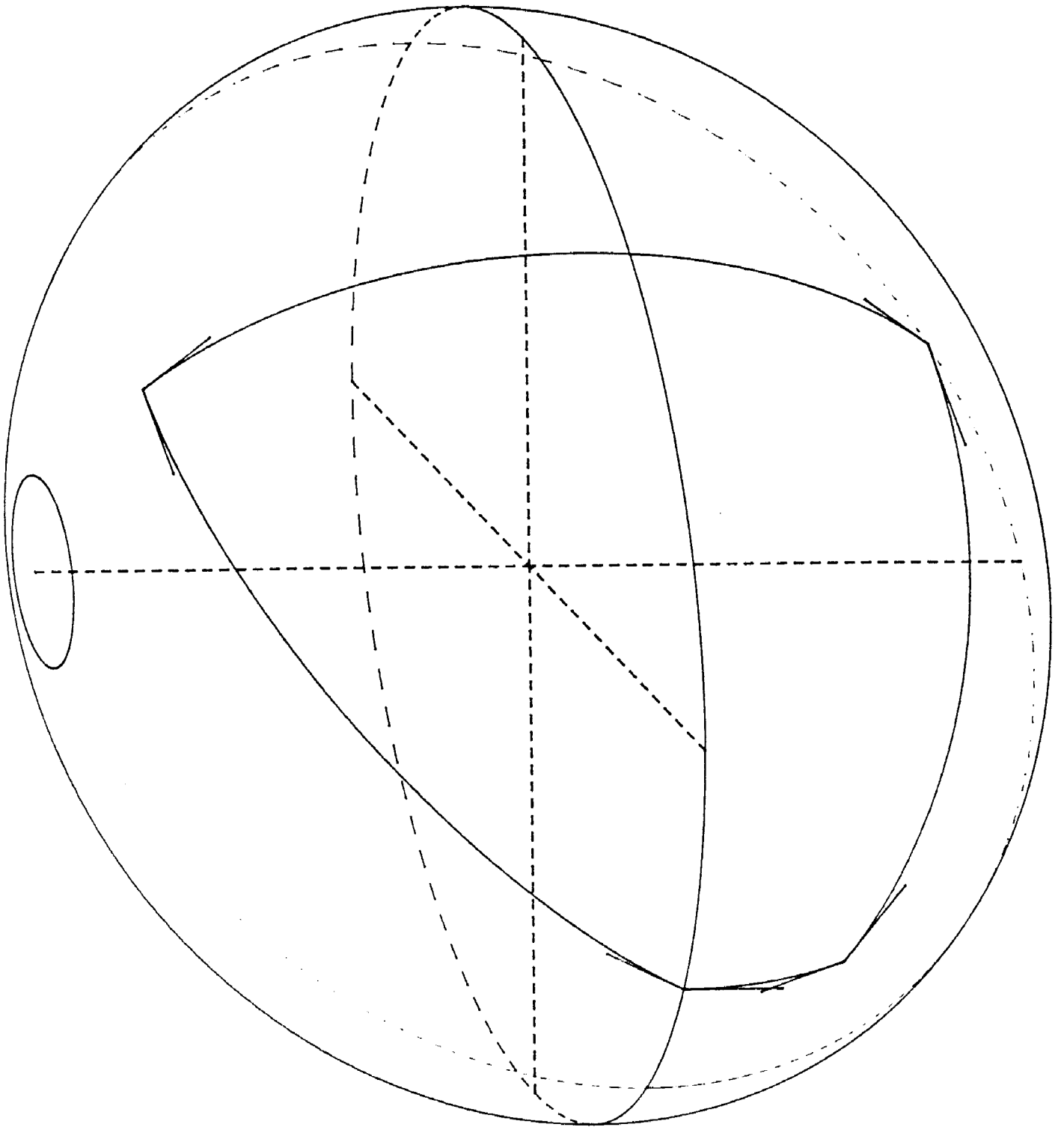
Inkreis: Mittelpunkt : ( 0.93| 0.27| 0.25) Sphärischer Radius = 0.81

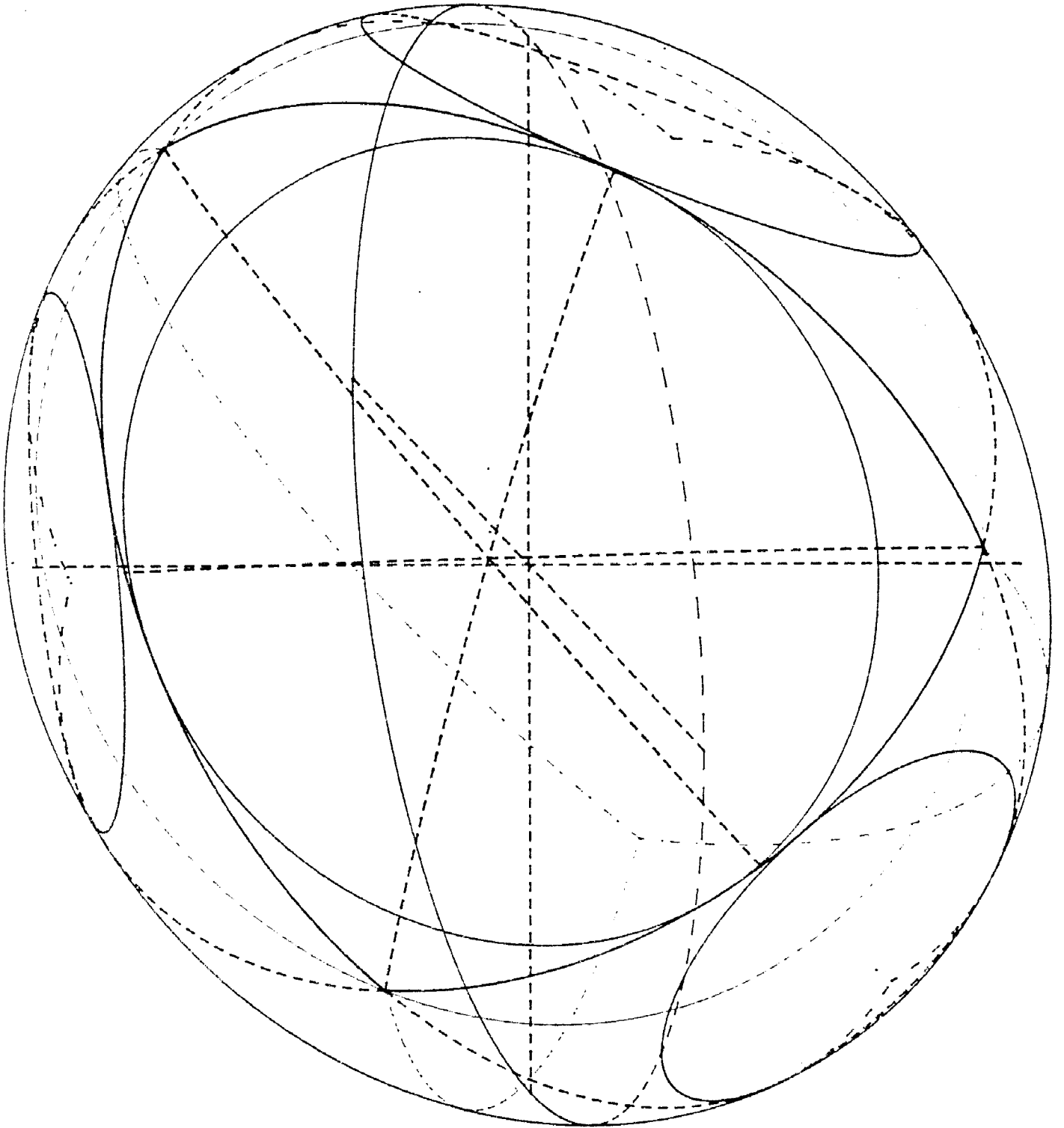
Höhenschnittpunkt: ( 0.98|-0.17| 0.12) (und Antipode)

Schwerpunkt: ( 0.92| 0.31| 0.24)

Ankreis: Mittelpunkt Ia: (-0.09| 0.74| 0.67) Sphärischer Radius = 0.47  
 Ankreis: Mittelpunkt Ib: ( 0.32|-0.86| 0.39) Sphärischer Radius = 0.59  
 Ankreis: Mittelpunkt Ic: ( 0.44| 0.15|-0.89) Sphärischer Radius = 0.50

Bitte Taste drücken





## L I T E R A T U R

- [B] Bigalke, H.G.: Kugelgeometrie, Otto Salle Verlag, Frankfurt - Berlin - München, 1984
- [B-S] Bronstein, Smendjajew: Taschenbuch der Mathematik, BSB-Teubner-Verlagsges., Leipzig, 1960
- [E] Endel, K.: Kreative Computergraphik, Düsseldorf, VDI-Verlag, 1986
- [G] Glasser, G.: 3D-Programmierung mit BASIC, Hölder Pichler Tempsky, Wien, 1986
- [H] Hochschild G.P.: Perspectives of Elementary Mathematics, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg - Tokyo, 1983
- [S] Sigl, R.: Ebene und sphärische Trigonometrie, Leipzig, 1977